

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Д.т.н. В.П. Гусынин¹, к.т.н. А.В. Гусынин², к.т.н. О.Н.Замирец³

1. Alcantara Cyclone Space, Бразилиа, Бразилия
2. Национальный Технический Университет Украины «КПИ», Киев, Украина
3. Государственное предприятие Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, г.Харьков

Рассмотрено применение модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению нелинейных двухточечных краевых задач. Подход базируется на применении математического аппарата дифференциальных преобразований с аппроксимацией нелинейных членов дифференциальных уравнений полиномами Адомиана. Полученные численные результаты показали хорошую сходимость с точным решением.

Розглянуто застосування модифікованого методу диференціальних перетворень до розв'язку нелінійних двоточкових крайових задач. Підхід базується на застосуванні математичного апарату диференціальних перетворень із апроксимацією нелінійних членів диференціальних рівнянь поліномами Адоміана. Отримані числові результати показали добру збіжність з точним розв'язком.

Application of modified method of differential transformations for solving non-linear two-point boundary value problem is considered. The approach is based on application of mathematical apparatus of differential transformations with approximation of non-linear terms of differential equation by corresponding polynomials Adomian. Obtained numerical results has shown the good convergence with exact solution.

Ключевые слова: дифференциальные преобразования, полиномы Адомиана, модифицированный метод, нелинейная двухточечная краевая задача

Введение

Нелинейные двухточечные краевые задачи, описываемые нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, часто возникают при моделировании различных проблем во многих областях науки и техники, таких как оптимальное управление, динамика полета летательных аппаратов, газовая динамика, механика жидкости, электрогидродинамика, астрофизика, ядерная физика, квантовая механика и других областях. Решения таких задач должны удовлетворять начальным и конечным граничным условиям, что часто является затруднительным. В общем случае, нелинейные краевые задачи не имеют аналитического решения и для их решения используются различные приближенные и численные методы, которые доказали свою эффективность. К таким методам

относятся метод стрельбы [1,2], конечно-разностный метод [3,4], метод взвешенных невязок [5,6] и др.

Применение большинства этих методов сопряжено с преодолением ряда математических и вычислительных сложностей. Одним из методов, позволяющих преодолеть данные трудности является разработанный Пуховым Г.Е. метод дифференциальных преобразований функций и уравнений (МДП) [7-9]. Данный метод является численно-аналитическим и основан на преобразованиях Тейлора. Основным преимуществом данного подхода является то, что он может быть применен непосредственно к решению систем нелинейных уравнений без их предварительной линеаризации, допускает возможность получения решения в аналитическом виде и значительно уменьшает объем вычислительных работ.

Часто при решении нелинейных дифференциальных уравнений, в том числе и с применением МДП, возникают математические трудности, связанные со сложной нелинейностью уравнения. Эти трудности можно преодолеть с помощью полиномов Адомиана [10]. В основу данного подхода положено разбиение нелинейного дифференциального уравнения на линейные и нелинейные составляющие и аппроксимация неизвестной нелинейной части уравнения полиномом Адомиана. Применение полиномов Адомиана в методе дифференциальных преобразований (модифицированный метод дифференциальных преобразований) значительно упрощает решение нелинейных краевых задач и расширяет сферу применения МДП. В работах [11-13] показана эффективность применения модифицированного метода дифференциальных преобразований (ММДП) к решению нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью данной работы является решение нелинейных двухточечных краевых задач, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, модифицированным методом дифференциальных преобразований.

Модифицированный метод дифференциальных преобразований

Дифференциальные преобразования позволяют заменить в математической модели физического процесса функции $x(t)$ непрерывного аргумента t их

спектральными моделями в форме дискретных функций $X(k)$ целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2, \dots$.

Дифференциальные преобразования функции $x(t)$ имеют следующий вид:

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad (1)$$

где $x(t)$ - оригинал функции, представляющий собой непрерывную, бесконечное число раз дифференцируемую и ограниченную вместе со всеми своими производными функцию действительного аргумента t , $X(k)$ - дифференциальное изображение оригинала (дифференциальный спектр), представляющее собой дискретную функцию целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2, \dots$, H - масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t и часто равная отрезку $0 \leq t \leq H$, на котором рассматривают функцию $x(t)$. Обратным преобразованием, позволяющим по изображению $X(k)$ получить оригинал $x(t)$ в форме степенного ряда Тейлора, является:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k). \quad (2)$$

или при $H=1$:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X(k)t^k. \quad (3)$$

Величина H должна быть меньше радиуса сходимости ряда ρ , который можно определить на основе признака сходимости Даламбера:

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{H^k} : \frac{H(k+1)}{H^{k+1}} \right| = H \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{X(k)}{X(k+1)} \right| \quad (4)$$

Обычно, для практических применений, функцию $x(t)$ определяют в виде конечного ряда:

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^N X(k)t^k. \quad (5)$$

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первой степени:

$$\dot{x}(t) = u[t, x(t)] + f[t, x(t)], \quad (6)$$

с заданным начальным условием $x(0)$, где $u[t, x(t)]$, $f[t, x(t)]$ - соответственно линейная и нелинейная части уравнения.

В соответствии с методом полиномов Адомиана нелинейная часть уравнения аппроксимируется полиномом Адомиана в виде бесконечного ряда:

$$f[t, x(t)] = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(t) \quad (7)$$

Компоненты полинома Адомиана определяются выражением:

$$A_n = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[Q \left(\sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l x_l \right) \right] \right\}_{\lambda=0} \quad (8)$$

элементы которых для нелинейной функции $f = f[t, x(t)] = f[x(t)]$ вычисляются по формулам [10]:

$$A_0 = f(x_0), \quad A_1 = x_1 f^{(1)}(x_0),$$

$$A_2 = x_2 f^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 f^{(2)}(x_0),$$

$$A_3 = x_3 f^{(1)}(x_0) + x_1 x_2 f^{(2)}(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 f^{(3)}(x_0),$$

$$A_4 = x_4 f^{(1)}(x_0) + \left(x_1 x_3 + \frac{1}{2!} x_2^2 \right) f^{(2)}(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} x_1^2 x_2 f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{4!} x_1^4 f^{(4)}(x_0),$$

$$A_5 = x_5 f^{(1)}(x_0) + (x_2 x_3 + x_1 x_4) f^{(2)}(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} (x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2) f^{(3)}(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 x_2 f^{(4)}(x_0) + \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{5!} x_1^5 f^{(5)}(x_0), \dots$$

С учетом свойств дифференциальных преобразований компоненты дифференциального изображения нелинейной функции $f[x(t)]$ искомого дифференциального уравнения при $t_0 = 0$ имеют вид [14]:

$$F(0) = f(x(0)) = f(X(0)) = f(x_0),$$

$$F(1) = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0} = x'(0) f^{(1)}(x(0)) = X(1) f^{(1)}(X(0)),$$

$$F(2) = X(2) f^{(1)}(X(0)) + \frac{1}{2!} (X(1))^2 f^{(2)}(X(0)),$$

$$F(3) = X(3) f^{(1)}(X(0)) + X(1) X(2) f^{(2)}(X(0)) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (X(1))^3 f^{(3)}(X(0)),$$

$$F(4) = X(4) f^{(1)}(X(0)) + (X(1) X(3) + \frac{1}{2!} (X(2))^2) f^{(2)}(X(0)) + \quad (10)$$

$$+ \frac{1}{2!} (X(1))^2 X(2) f^{(3)}(X(0)) + \frac{1}{4!} (X(1))^4 f^{(4)}(X(0)),$$

$$F(5) = X(5) f^{(1)}(X(0)) + (X(2) X(3) +$$

$$+ X(1) X(4)) f^{(2)}(X(0)) + \frac{1}{2!} (X(1))^2 X(3) +$$

$$+ X(1) (X(2))^2) f^{(3)}(X(0)) +$$

$$+ \frac{1}{3!} (X(1))^3 X(2) f^{(4)}(X(0)) + \frac{1}{5!} (X(1))^5 f^{(5)}(X(0)), \dots$$

Принимая во внимание, что компоненты дифференциального изображения оригинала нелинейной функции дифференциального уравнения и соответствующие компоненты полинома Адомиана имеют одинаковую математическую структуру, можно считать, что компоненты дифференциального изображения оригинала нелинейной функции уравнения могут быть получены из соответствующих компонентов полиномов Адомиана путем замещения компоненты решения $x_k(t)$ соответствующим компонентом дифференциального изображения $X(k)$ того же индекса.

В работе [14] показано, что такое замещение может быть применено к любым видам нелинейностей дифференциальных уравнений. Таким образом, для решения нелинейной краевой задачи можно применить комбинированный метод дифференциальных

преобразований с аппроксимацией нелинейной части уравнения полиномом Адомиана.

Алгоритм решения нелинейной краевой задачи

Алгоритм решения нелинейной краевой задачи с учетом приведенного выше модифицированного метода дифференциальных преобразований рассмотрим на примере решения двухточечной нелинейной краевой задачи, в которой граничные условия задаются в двух точках, а объект описывается нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t)], \quad t \in [t_0, T] \quad (11)$$

с граничными условиями:

$$\dot{x}(t_0) = 0 \quad (12)$$

$$a \cdot x(T) + b\dot{x}(T) = c. \quad (13)$$

Здесь a, b, c - заданные константы. Предполагается, что функция $x(t)$ и ее производные, а также нелинейная по x функция $f[t, x(t)]$ являются непрерывными функциями, а уравнение (11) имеет единственное решение.

Алгоритм решения нелинейной краевой задачи состоит из выполнения следующих этапов.

1. Уравнение (11) записывается в области изображений:

$$(k+1)X(k+1) = F(k). \quad (14)$$

Здесь $F(k)$ - дифференциальное изображение нелинейной функции $f[t, x(t)]$.

2. С учетом (1) и граничного условия (12) имеем следующее значение для первой дискреты решения: $X(1) = 0$. Для нулевой дискреты примем $X(0) = \alpha$, где значение параметра α будет определено в дальнейшем.

3. Дифференциальное изображение $F(k)$ замещается соответствующим полиномом Адомиана, в котором каждая компонента решения $x_k(t)$ замещается на соответствующий компонент дифференциального изображение $X(k)$ того же индекса:

$$F(k) = \tilde{A}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

4. Подставляя (15) в (14), с учетом (5) и п.2 получим решение нелинейной краевой задачи (11) - (13) в следующем виде:

$$x(t) = \alpha + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\tilde{A}_{k-1}}{k+1} t^{k+1}. \quad (16)$$

5. Подставляя решение (16) в краевое условие (13) получим нелинейное алгебраическое уравнение для определения неизвестного параметра a .

6. Подставляя найденное значение параметра a в выражение (16) получим решение нелинейной краевой задачи (11) - (13).

Примеры решения нелинейных краевых задач

Пример 1. Рассмотрим краевую задачу, описываемую системой нелинейных дифференциальных уравнений [15]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2, \\ \dot{x}_2(t) &= 1 - x_2^2 \end{aligned} \quad (17)$$

при дополнительных условиях

$$\begin{aligned} x_{20} + x_{2T} &= th1, \\ x_1(0) = x_{10} = 0, \quad x_1(T) = x_{1T} &= \ln(ch1), \\ x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(T) = x_{2T}, \quad t \in [0, T], \quad T = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

В данном примере неизвестными краевыми условиями являются x_{20}, x_{2T} , связанные первым уравнением системы (18), а краевая задача (17) - (18) имеет следующее точное решение:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ln(cht), \quad x_2(t) = tht, \\ x_2(0) = 0, \quad x_2(T) &= th1. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем краевую задачу (17) - (18) в области изображений:

$$\begin{aligned} X_1(k+1) &= \frac{1}{k+1} X_2(k), \\ X_2(k+1) &= \frac{1}{k+1} [\vartheta(k) - \tilde{A}_k], \\ X_2(0) + X_2(T) &= th1, \\ X_1(0) = x_{10} = 0, \quad X_1(T) &= x_{1T} = \ln(ch1), \\ X_2(0) = x_{20}, \quad X_2(T) = x_{2T}, \quad t \in [0, T], \quad T = 1 \end{aligned} \quad (20)$$

где $\vartheta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$.

В соответствии с процедурой (9), для нелинейной части второго уравнения системы уравнений (17) $f_2[x_2(t)] = x_2^2(t)$ вычисляем компоненты A_{2k} полиномов Адомиана и по ним определяем соответствующие компоненты \tilde{A}_{2k} для замещения ими соответствующих компонентов дифференциальных изображений нелинейной части второго уравнения в спектральной модели (20):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{20} &= X_2^2(0), \\ \tilde{A}_{21} &= 2X_2(0)X_2(1), \\ \tilde{A}_{22} &= X_2^2(1) + 2X_2(0)X_2(2), \\ \tilde{A}_{23} &= 2X_2(0)X_2(3) + 2X_2(1)X_2(2), \\ \tilde{A}_{24} &= 2X_2(0)X_2(4) + 2X_2(1)X_2(3) + X_2^2(2), \\ \tilde{A}_{25} &= 2X_2(0)X_2(5) + 2[X_2(2)X_2(3) + X_2(1)X_2(4)] \dots \end{aligned} \quad (21)$$

По спектральной модели (20), с учетом вычисленных значений \tilde{A}_{ik} для $k = 0, 1, 2, \dots$, получим выражения для определения первых 6-ти дискрет дифференциальных спектров, выраженных через неизвестное краевое условие x_{20} :

$$\begin{aligned} X_1(0) = x_{10} = 0, \quad X_2(0) &= x_{20}, \\ X_1(1) = x_{20}, \quad X_2(1) &= (1 - x_{20}^2), \\ X_1(2) = \frac{1}{2}(1 - x_{20}^2), \quad X_2(2) &= -x_{20}(1 - x_{20}^2), \\ X_1(3) = -\frac{1}{3}x_{20}(1 - x_{20}^2), \quad X_2(3) &= -\frac{1}{3}[1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_1(4) &= -\frac{1}{12} [1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \\
 X_2(4) &= \frac{1}{3} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \\
 X_1(5) &= \frac{1}{15} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \\
 X_2(5) &= -\frac{1}{15} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \\
 X_1(6) &= -\frac{1}{90} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \\
 X_2(6) &= -\frac{1}{45} [17x_{20} - 77x_{20}^3 + 105x_{20}^5 - 45x_{20}^7]
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Следовательно, с учетом (3), имеем следующее решение краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= x_{20} \cdot t + \frac{1}{2} (1 - x_{20}^2) \cdot t^2 - \\
 &- \frac{1}{3} x_{20} (1 - x_{20}^2) \cdot t^3 - \frac{1}{12} [1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \cdot t^4 + \\
 &+ \frac{1}{15} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \cdot t^5 - \\
 &- \frac{1}{90} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \cdot t^6 - \dots, \\
 x_2(t) &= x_{20} + (1 - x_{20}^2) \cdot t - x_{20} (1 - x_{20}^2) \cdot t^2 - \\
 &- \frac{1}{3} [1 - 4x_{20}^2 + 3x_{20}^4] \cdot t^3 + \frac{1}{3} [2x_{20} - 5x_{20}^3 + 3x_{20}^5] \cdot t^4 - \\
 &- \frac{1}{15} [17x_{20}^2 - 30x_{20}^4 + 15x_{20}^6 - 2] \cdot t^5 - \\
 &- \frac{1}{45} [17x_{20} - 77x_{20}^3 + 105x_{20}^5 - 45x_{20}^7] \cdot t^6 - \dots
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

Из второго уравнений системы (23), с учетом граничного условия $x_{20} + x_{2T} = th1$, определяем неизвестные краевые условия:

$$x_{20} = 0,00015, \quad x_{2T} = 0,76144.$$

Тогда решение искомой краевой задачи (17) - (18) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= 0.00015 \cdot t + 0.5t^2 - 0.00005 \cdot t^3 - \\
 &- 0.08333 \cdot t^4 + 0.00002 \cdot t^5 - 3.33 \cdot 10^{-6} \cdot t^6 - \dots \\
 x_2(t) &= 0.00015 + t - 0.00015 \cdot t^2 - 0.33333 \cdot t^3 + \\
 &+ 0.0001 \cdot t^4 - 0.00002 \cdot t^5 - 0.00005 \cdot t^6 - \dots
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Таблица 1

Сравнительная оценка решения примера 1

t	Точное решение		ММДП		ϵ_r	
	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	0	0	0	1.49 e-04	0	2.25 e-04
0.2	1.99 e-02	1.97 e-01	1.99 e-02	1.97 e-01	2.81 e-05	1.53 e-04
0.4	7.79 e-02	3.79 e-01	7.79 e-02	3.79 e-01	2.99 e-05	1.74 e-03
0.6	1.70 e-01	5.37 e-01	1.69 e-01	5.28 e-01	8.55 e-04	1.35 e-02
0.8	2.91 e-01	6.64 e-01	2.86 e-01	6.29 e-01	4.79 e-03	5.21 e-02

На рис.1 и в табл.1 показано сравнение между точным решением краевой задачи (17) - (18) и решением по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученного по ММДП с использованием 6-ти первых дискрет дифференциальных спектров решения.

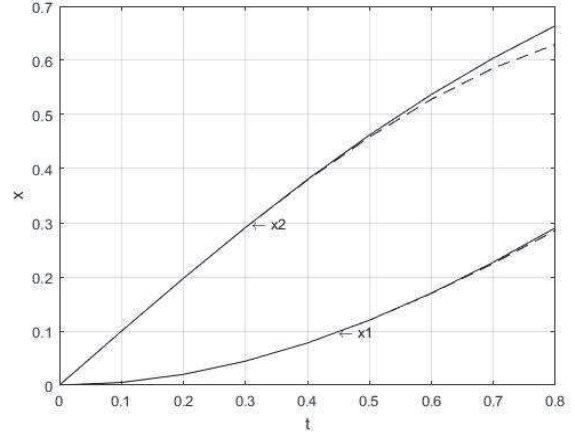


Рис. 1. Сравнение точного решения (-) и решения по ММДП (--), полученного с учетом 6-ти дискрет для примера 1

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу, описываемую нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка [16,17]:

$$t \cdot \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) = -t \cdot x^5(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{25}$$

с граничными условиями $\dot{x}(0) = 0, \quad x(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Здесь неизвестным граничным условием является значение функции $x(t)$ при $t = 0$. Точное решение

краевой задачи (25) имеет вид: $x(t) = \sqrt{\frac{3}{3+t^2}}$ [16].

Примем, что $x(0) = X(0) = \alpha$, где параметр α подлежит определению.

Запишем краевую задачу (25) в области изображений:

$$(k+1)(k+2)X(k+1) = \tilde{A}_{k-1} \tag{26}$$

В соответствии с процедурой (9), для нелинейной части уравнения (25) $f[t, x] = -x^5(t)$ вычисляем компоненты A_k полиномов Адомиана и по ним определяем соответствующие компоненты \tilde{A}_k для замещения ими соответствующих компонентов дифференциальных изображений нелинейной части уравнения в спектральной модели исходной системы:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_0 &= -X^5(0), \quad \tilde{A}_1 = -5X^4(0)X(1), \\
 \tilde{A}_2 &= -10X^3(0)X^2(1) - 5X^4(0)X(2), \\
 \tilde{A}_3 &= -10X^2(0)X^3(1) - 20X^3(0)X(1)X(2) - 5X^4(0)X(3), \\
 \tilde{A}_4 &= -5X^4(0)X(4) - 20X^3(0)X(1)X(3) - \\
 &- 10X^3(0)X^2(2) - 30X^2(0)X^2(1)X(2) - \\
 &- 5X^4(1)X(3), \dots
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Получим следующие дискреты:

Сравнительная оценка решения примера 2

t	Точное решение	ММДП	ε_r
	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
0	1	0.998982	1.02e-03
0.2	0.993399	0.992414	9.85e-04
0.4	0.974355	0.973463	8.92e-04
0.6	0.944911	0.944160	7.51e-04
0.8	0.907841	0.907330	5.11e-04
1.0	0.866025	0.866344	3.19e-04

$$\begin{aligned}
 X(0) &= \alpha, X(1) = 0, X(2) = -\frac{1}{6}\alpha^5, X(3) = 0, \\
 X(4) &= \frac{1}{24}\alpha^9, X(5) = 0, X(6) = -\frac{5}{432}\alpha^{13}, \\
 X(7) &= 0, X(8) = \frac{35}{10368}\alpha^{17}, X(9) = 0, \\
 X(10) &= -\frac{7}{6912}\alpha^{21}, \dots
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Необходимо отметить, что $X(k) = 0$, при нечетном k и $k \geq 3$.

Для 10 первых дискрет, получим следующий ряд:

$$\begin{aligned}
 x_{10}(t) &= \alpha - \frac{1}{6}\alpha^5 \cdot t^2 + \frac{1}{24}\alpha^9 \cdot t^4 - \\
 &- \frac{5}{432}\alpha^{13} \cdot t^6 + \frac{35}{10368}\alpha^{17} \cdot t^8.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Учитывая второе краевое условие $x(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ получим следующее нелинейное алгебраическое уравнение для определения неизвестного параметра α :

$$\begin{aligned}
 x_{10}(1) &= \alpha - \frac{1}{6}\alpha^5 + \frac{1}{24}\alpha^9 - \frac{5}{432}\alpha^{13} + \\
 &+ \frac{35}{10368}\alpha^{17} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Решая данное уравнение относительно неизвестного параметра, получим, что $\alpha = 0.998982$. Подставляя значение α в выражение (29) получим приближенное решение исходной краевой задачи (25):

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 0.998982 - 0.165820 \cdot t^2 + 0.041286 \cdot t^4 - \\
 &- 0.011422 \cdot t^6 + 0.003318 \cdot t^8 - \dots
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

На рис.2 и в табл.2 показано сравнение между точным решением краевой задачи (25) и решением по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученного по ММДП с использованием 10-ти дискрет дифференциальных спектров решения.

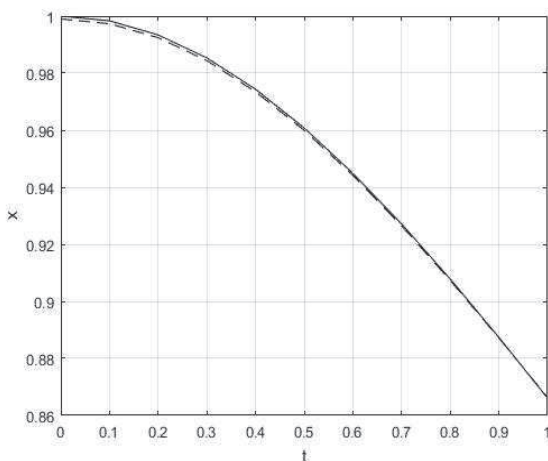


Рис. 2. Сравнение точного решения (-) и решения по ММДП (---), полученного с учетом 10-ти дискрет для примера 2

Пример 3. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу [18]:

$$\ddot{x}(t) = 2x(t) \cdot \dot{x}(t), \quad 0 \leq t \leq b < \frac{\pi}{2}, \tag{32}$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(b) = \sec^2 b.$$

где b - длина интервала, на котором рассматривается решение задачи.

Точное решение этого уравнения: $y(x) = \tan(x)$.

Для неизвестного начального условия примем $\dot{x}(0) = \alpha$, где α - параметр, подлежащий определению, и запишем задачу (32) в области изображений:

$$(k+1)(k+2)X(k+2) = 2 \sum_{l=0}^k (l+1)X(l+1)X(k-l), \tag{33}$$

$$X(0) = 0, X(1) = \alpha.$$

По данной спектральной модели определяем значения дискрет:

$$X(0) = 0, X(1) = \alpha, X(2) = 0, X(3) = \frac{1}{3}\alpha^2,$$

$$X(4) = 0, X(5) = \frac{2}{15}\alpha^3, X(6) = 0,$$

$$X(7) = \frac{17}{315}\alpha^4, X(8) = 0, X(9) = \frac{62}{2835}\alpha^5,$$

$$X(10) = 0, \dots$$

В общем случае, $X(2k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно, с учетом (3) получим следующее решение краевой задачи (32) в зависимости от неизвестного параметра α :

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \alpha \cdot t + \frac{1}{3}\alpha^2 \cdot t^2 + \frac{2}{15}\alpha^3 t^5 + \frac{17}{315}\alpha^4 \cdot t^7 + \\
 &+ \frac{62}{2835}\alpha^5 \cdot t^9 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} X(2k+1)t^{2k+1}
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Постоянная α определяется из наложения граничного условия $\dot{x}(b) = \sec b$ при $t = b$ на решение (34):

$$\dot{x}_n(b) = \sum_{k=0}^n (2k+1)X(2k+1)t^{2k} = \sec^2 b$$

Решая данное уравнение получаем значение неизвестного параметра $\alpha = 1,015141$. Тогда решение краевой задачи (32) будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1,015141 \cdot t + 0,343504 \cdot t^2 + 0,139482 \cdot t^5 + \\
 &+ 0,057312 \cdot t^7 + 0,023576 \cdot t^9 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

На рис.3 и в табл.3 показано сравнение между точным решением краевой задачи (32) и решением по модифицированному методу дифференциальных преобразований, а также приведена относительная ошибка решения, полученного по ММДП с использованием 10-ти дискрет дифференциальных спектров решения.

Таблица 3
Сравнительная оценка решения примера 3

t	Точное решение	ММДП	ε_r
	$x(t)$	$x(t)$	$x(t)$
0	0	0	0
0.2	0.202710	0.216813	9.06e-03
0.4	0.422793	0.462490	2.55e-02
0.6	0.684137	0.744490	3.88e-02
0.8	1.029639	1.085774	3.60e-02
1.0	1.557408	1.545301	7.77e-03

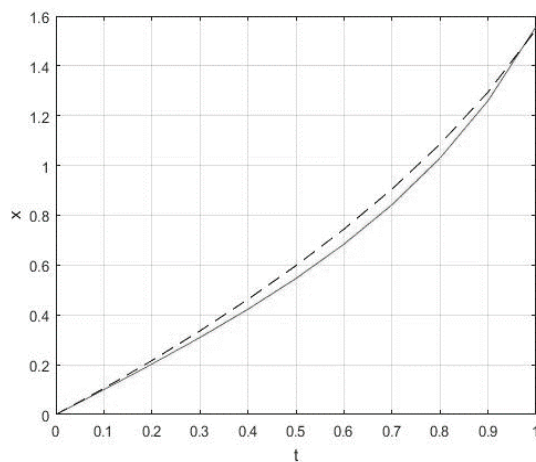


Рис.3. Сравнение точного решения (-) и решения по ММДП (--), полученного с учетом 10-ти дискрет для примера 3

Выводы

Рассмотрено применение модифицированного метода дифференциальных преобразований к решению нелинейных краевых задач, возникающих при моделировании различных проблем науки и техники. Метод базируется на применении математического аппарата дифференциальных преобразований функций и уравнений с аппроксимацией нелинейных членов дифференциального уравнения краевой задачи соответствующими компонентами полиномов Адомиана. Основным преимуществом данного подхода является возможность его применения непосредственно к решению нелинейной краевой задачи без предварительной линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений и допускает возможность получения приближенного решения в аналитическом виде. Применение рассмотренного метода позволяет преодолеть математические трудности, связанные со сложной нелинейностью дифференциальных уравнений и проще в применении. Полученные численные результаты показывают хорошую сходимость с точным решением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. На Цунг-Йен. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / На Цунг-Йен. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
2. Ascher U.M., Mattheij R.M., Russell R.D. Numerical Solution of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988
3. Калеткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калеткин. – М.: Наука.1978. – 512с.
4. Faires J.D., Burden R.L. Numerical Methods, PWS, Boston, Massachusetts, 1993
5. Самойленко А.М. Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. – К.: Наукова думка. – 1970. – 800 с.
6. Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems, Dover, New York, 1992
7. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1986. – 160 с.
8. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1980. – 419 с.
9. Збруцький О.В. Диференціальні Т-перетворення в задачах автоматичного керування рухом літальних апаратів / О.В. Збруцький, В.П. Гусинін, А.В. Гусинін. – К.: НТУУКІП, 2010. – 176 с.
10. Adomian G. Solving frontier problems of physics: the decomposition method. – Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1994.
11. Гусынин А.В. Модифицированный метод дифференциальных преобразований для решения нелинейных проблем в техногенной сфере / А.В. Гусынин // Науковий вісник УкрНДПД. – 2016. - №3. – С. 20-30.
12. Elsaied A. Adomianpolynomials: a powerful tool for iterative methods of series solution of nonlinear equation//Journal of Applied Analysis and Computation. – 2012/- Vol.2, No.4. – P. 381-394.
13. Hassan Abdel-Halim I.H. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations // Applied Mathematical Modelling. – 2008. – No.32. – P. 2552-2559.
14. Ebaid A. On a general formula for computing the one-dimensional differential transform of nonlinear functions and its applications // Proceedings of the American Conference on Applied Mathematics, Harvard, Cambridge, USA, 2012. – P. 92-97.
15. Баранов В.Л. Решение нелинейных краевых задач на основе дифференциальных преобразований / В.Л. Баранов // Электронное моделирование. – 1996. – Т.18, №4. – С. 58-63.
16. Xie L., Zhou C., Xu S. An effective numerical method to solve a class of nonlinear singular boundary value problems using improved differential transform method [Online]. – 2016. – available at: <http://arxiv.org/pdf/1601.04922v1.pdf> (Accessed 5 May 2016).
17. Singh R., Kumar J. An efficient numerical technique for the solution of nonlinear singular boundary value problems//Computer Physics Communications. – 2014. – No. 185. – P. 1282-1289
18. Chang S.H., Chang I.L. A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions//Applied Mathematics and Computation. – 2008. – No. 195. – P. 799-808