519.6:004.942

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ СЕТОК КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Д.т.н. С.И. Гоменюк, к.т.н. С.В. Чопоров, М.А.В. Аль-Омари, Запорожский национальный университет

Рассмотрена проблема улучшения дискретных моделей. Предложенный способ сглаживания сеток основан на решении оптимизационной задачи и использовании R-функций для управления процессом сглаживания. Полученные результаты могут быть применены для построения начальных сеток или при решении задач исследования состояния пластин, находящихся под действием нагрузки заданной формы.

Розглянуто проблему поліпшення дискретних моделей. Запропонований спосіб вирівнювання сіток заснований на вирішенні оптимізаційної задачі і використанні R-функцій для управління процесом вирівнювання. Отримані результати можуть бути застосовані для побудови початкових сіток або при вирішенні завдань дослідження стану пластин, що знаходяться під дією навантаження заданої форми.

Herein in the paper it is described the mesh improvement problem. Proposed approach is based on functional optimization. R-functions are used to control the smoothing process. Offered results can be used to build initial grids. In addition, the results can be involved in the stress-strain analysis of plates with complex shape of loads.

Ключевые слова: *конечный элемент, сетка, дискретная модель, R-функция, сглаживание*

Введение

Проектирование сложных объектов и конструкций требует исследования их свойств и функциональных характеристик (например, прочности, долговечности, устойчивости и т. п.). Проведение физических экспериментов над опытными образцами зачастую является весьма дорогостоящим, поэтому на практике применяются различные математические модели для их исследования. Таким образом, актуальной является научно-техническая проблема повышения точности математического моделирования.

Значительная часть используемых в проектировании математических моделей основана на численных методах, использующих дискретные модели для анализа исследуемых объектов (метод конечных разностей, метод конечных элементов и т.п.). Их точность зависит от качества дискретных моделей (сеток). Следовательно, они представляют научно-технический интерес исследования, связанные с повышением качества сеток.

Обзор литературы

При разработке методов улучшения качества сетки наиболее часто используются две метрики: качество формы элемента (близость к правильной форме, т. е. отсутствие очень острых углов, соотношение длин сторон) и/или близость сетки к равномерной.

Наибольшее распространение получили подходы, основанные на сглаживании Лапласа [1], базирующемся на идее перемещения обрабатываемого узла в центр масс многоугольника, образованного соседними узлами (рис. 1). При этом актуальные направления исследований в данной группе методов базируются на введение системы весовых коэффициентов или контрольных функций, основанных, например, на значениях углов элемента [2], специальных интегральных функций [3] и т. п. [4-6].

Вторая группа методов основана на идее решения оптимизационной задачи для минимизации значения используемой метрики сетки. Здесь можно выделить методы, основанные на решении локальной (подобно сглаживанию Лапласа перемещается только один узел) [7-8] и глобальной [9-13] (минимизации подлежит функция координат всех внутренних узлов) оптимизационных задачах.

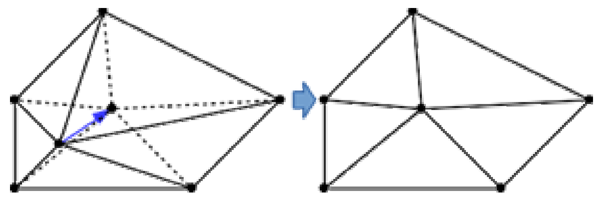

Рис. 1. Сглаживание Лапласа

Также разрабатываются гибридные методы [14-16], основанные на комбинировании оптимизационных методов и сглаживания Лапласа.

Описанные выше методы основаны на улучшении геометрических или топологических характеристик дискретной модели. Однако в задачах, например, построения дискретных моделей исследования напряженно-деформированного состояния пластин, находящихся под действием нагрузки некоторой формы, возникает необходимость управления процессом сглаживания. Анализ показал, что данное направление все еще остается недостаточно изученным. Таким образом, целью настоящего исследования является разработка способа сглаживания сетки с учетом возможности управления формой сглаживания при помощи специальной функции.

Метод исследования

Пусть некоторый двумерный объект представлен областью $\Omega \subset \mathbf{E}^2$. Дискретной моделью (или сеткой) будем называть разбиение Ω на конечное число подобластей некоторой формы. Предположим, что в качестве базовой формы используются четырехугольники. Тогда, согласно [9-10], функционал длины может быть представлен в виде

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{p_j\in N(p_i)} l(p_i,p_j)\right], \qquad (1)$$

где n – количество внутренних узлов сетки; $p_i=(x_i,y_i)$ – координаты i-го узла; $N(p_i)$ – множество узлов, соседних с i-м; $l(p_i,p_j)=\|p_j-p_i\|^2$ – квадрат расстояния между узлами p_i и p_j.

Свойства функционала (1), а также некоторых других (площади, ортогональности и комбинированные), рассмотрены в работах [10-11]. Его минимум достигается, если четырехугольники, образующие сетку, обладают сторонами одинаковой длины – минимизация (1) стремится сделать сетку равномерной. Соответственно для сглаживания (или адаптации) сетки необходимо найти координаты внутренних узлов, при которых (1) достигает минимума, например, при помощи метода сопряженных градиентов или подобного.

Для управления процессом рассмотрим функционал вида

$$F(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{p_j\in N(p_i)} \alpha l(p_i,p_j)+\beta\Phi(x,y)\right], \qquad (2)$$

где $\Phi(x,y)$ – управляющая функция, которая должна быть неотрицательна в своей области определения; α и β – весовые коэффициенты.

Очевидно, что в процессе минимизации (2) в окрестности минимумов данной функции будет перемещаться большее количество узлов.

Во многих практических задачах требуется, чтобы сетка сгущалась в окрестностях границ некоторой области. Форму такой области можно определить, использовав неявные функции. Например, функция

$$\mathrm{circle}(x,y,r)\equiv r^2-x^2-y^2 \qquad (3)$$

больше нуля в точках, ограниченных окружностью радиуса r и центром в начале координат, меньше нуля во внешних точках и равна нулю на границе области. Функции, соответствующие областям более сложной формы, могут быть определены конструктивно, используя логические R-операции Рвачева В.Л. [17-18]. Наиболее распространенная система R-функций имеет вид

$$\begin{gathered}\neg x\equiv -x;\\ x_1\wedge x_2\equiv x_1+x_2-\sqrt{x_1^2+x_2^2};\\ x_1\vee x_2\equiv x_1+x_2+\sqrt{x_1^2+x_2^2},\end{gathered} \qquad (4)$$

где x_1 и x_2 значения неявных функций-операндов логических операций. Например, функция

$$\mathrm{annular}(x,y,r_i,r_o)\equiv \mathrm{circle}(x,y,r_o)\wedge\neg\mathrm{circle}(x,y,r_i) \qquad (5)$$

соответствует кольцевой области с внутренним радиусом r_i и внешним радиусом r_o. Аналогично моделируются более сложные двумерные и трехмерные геометрические объекты.

Эксперименты

Рассмотрим несколько примеров использования функционала вида (2) для сглаживания сетки. В качестве базовой управляющей функции $\Phi(x,y)$ можно использовать, например, выражение вида

$$\Phi(x,y)=1-\mathrm{sech}(\mathrm{shape}(x,y)) \qquad (6)$$

для сглаживания дискретных моделей небольших объектов; или

$$\Phi(x,y)=|\mathrm{shape}(x,y)| \qquad (7)$$

в остальных случаях.

В формуле (6) $\mathrm{sech}(x)=\dfrac{1}{\cosh(x)}$ – функция секанса. Под $\mathrm{shape}(x,y)$ в формулах (6-7) обозначена неявная функция, описывающая геометрическую область. Например, если принять

$$\Phi(x,y)=1-\mathrm{sech}(\mathrm{annular}(x;y;0{,}5;0{,}8)), \qquad (8)$$

то в результате минимизации функционала (распределение значений функции (8) представлено на рис. 2) получим сетку, изображенную на рис. 3-4.

Аналогично прямоугольная область может быть представлена формулой

$$\mathrm{rect}(x,y,w,h)=\left(\frac{w^2}{4}-x^2\right)\wedge\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right), \qquad (9)$$

где w и h – соответственно ширина и высота.

Если принять

$$\Phi(x,y)=1-\mathrm{sech}(\mathrm{rect}(x;y;1{,}6;1)), \qquad (10)$$

то в результате минимизации функционала (распределение значений функции (10) представлено на рис. 5) можно получить сетку, изображенную на рис. 6.

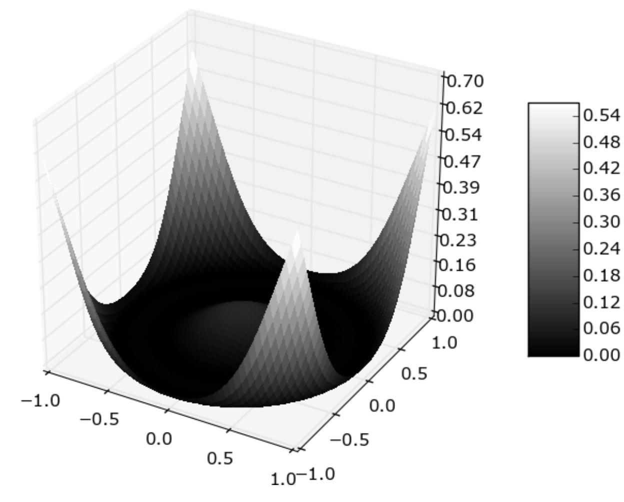

Рис. 2. Распределение значений функции (8)

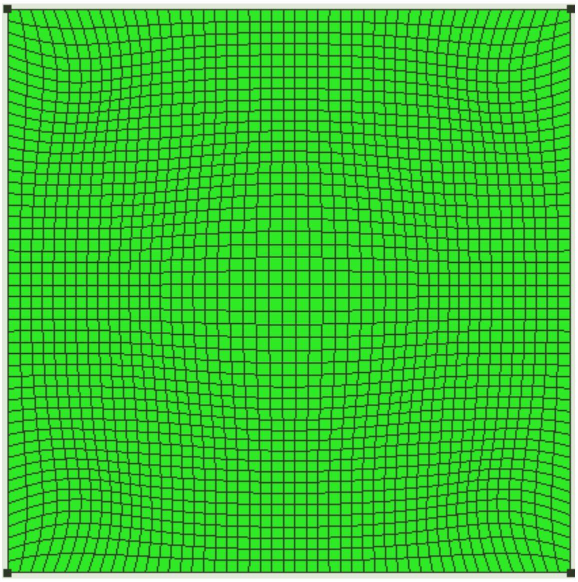

Рис. 3. Сглаживание на основе функции (8): α=0,95 и β=0,05

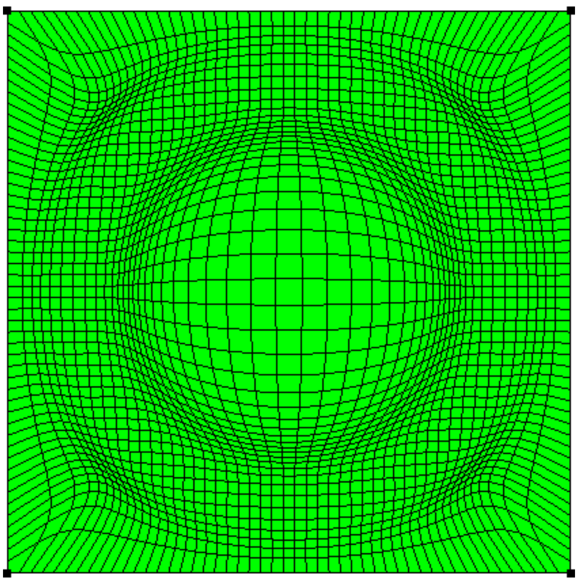

Рис. 4. Сглаживание на основе функции (8): α=0,7 и β=0,3

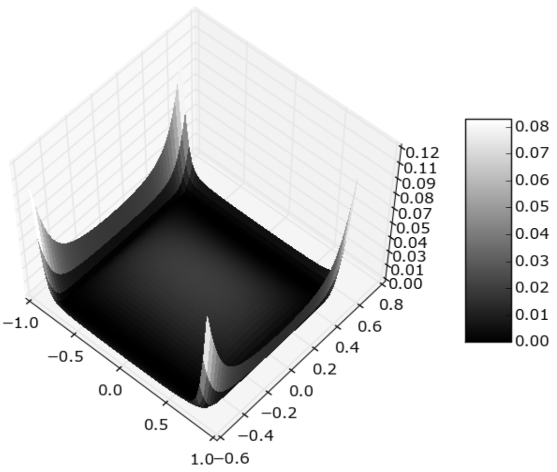

Рис. 5. Распределение значений функции (10)

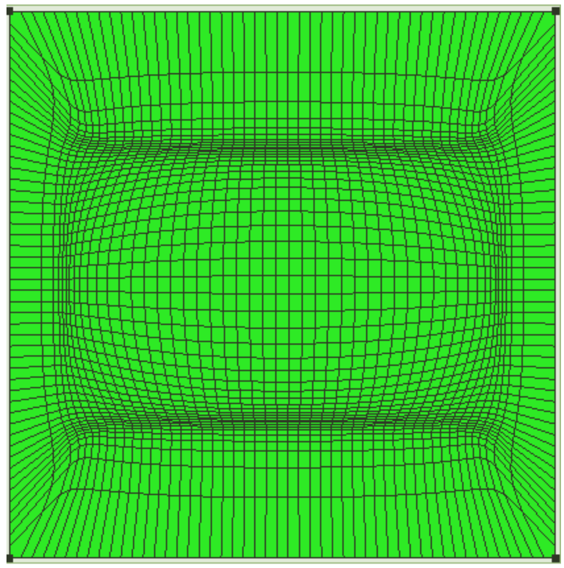

Рис. 6. Сглаживание на основе функции (10): α=0,7 и β=0,3

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) = 1 - \operatorname{sech}\big[&\operatorname{rect}(x+1; y+1; 0{,}5; 0{,}5) \vee \\ &\vee \operatorname{rect}(x-1; y+1; 0{,}5; 0{,}5) \vee \\ &\vee \operatorname{rect}(x-1; y-1; 0{,}5; 0{,}5) \vee \\ \big]&\vee \operatorname{rect}(x+1; y-1; 0{,}5; 0{,}5)\end{aligned} \qquad (11)$$

Распределение значений функции (11) (представлено на рис.7) позволяет адаптивно сгустить сетку внутри четырех квадратов (рис. 8).

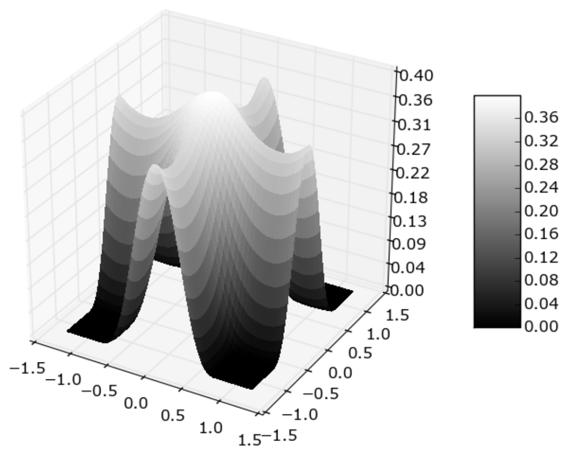

Рис. 7. Распределение значений функции (11)

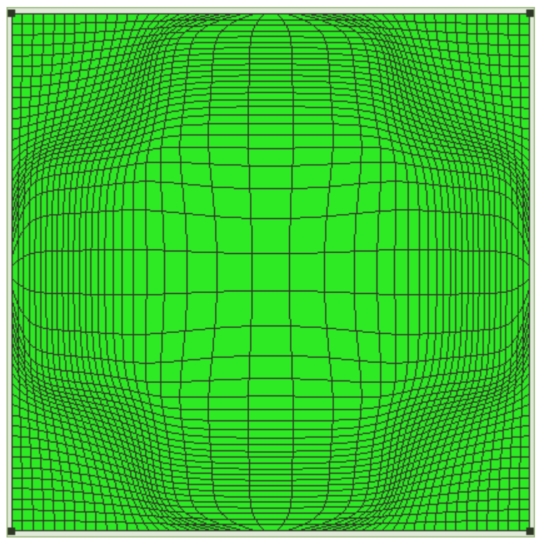

Рис. 8. Сглаживание на основе функции (11): α=0,7 и β=0,3

сглаживание на основе минимизации функционала также может быть применено и для неструктурированных сеток. Например, функция

$$\mathrm{rh}(x,y)=\mathrm{rect}(x,y,30,20)\wedge\neg\mathrm{circle}(x,y,5) \qquad (12)$$

определяет прямоугольную область размером 30 на 20 ед. с центральным отверстием радиуса 5 ед. В качестве управляющей для сглаживания дискретной модели (рис. 9) можно использовать функцию

$$\Phi(x,y)=\left|\mathrm{rh}(x,y)\right|. \qquad (13)$$

Исходная дискретная модель, соответствующая (12), изображена на рис. 9, сглаженная – на рис. 10.

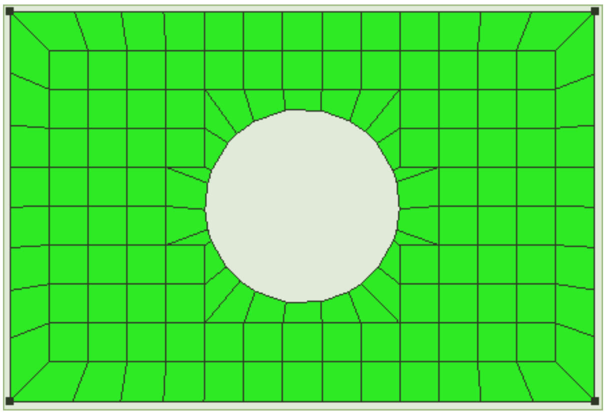

Рис. 9. Исходная сетка на основе функции (12)

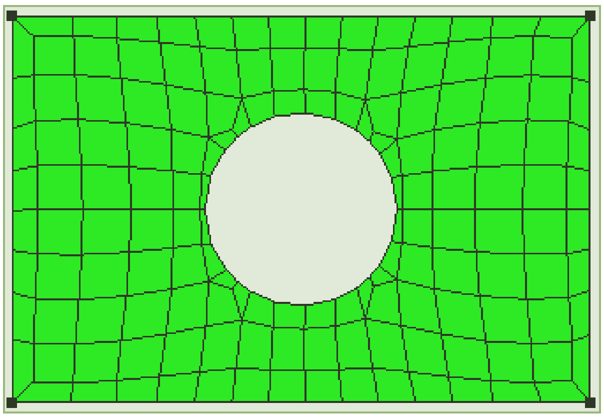

Рис. 10. Сглаживание на основе функции (13): α=0,81 и β=0,19

Выводы

Предложенный метод, в отличие от существующих работ [9-13] для решения задачи сглаживания двумерных сеток, позволяет управлять процессом сглаживания, функционально определяя форму области, в которой будет сгущаться сетка.

Недостатком предложенного метода является относительно высокая вычислительная сложность (для сглаживания необходимо найти минимум нелинейной функции, у которой количество переменных равно удвоенному числу внутренних узлов), а также возможность получения вырожденных элементов при некоторых комбинациях весовых параметров α и β.

Таким образом, в соответствии с целью настоящего исследования, в статье разработан способ сглаживания сетки с учетом возможности управления формой сглаживания при помощи специальной функции. Научная новизна результатов, полученных в статье, состоит в том, что впервые предложен способ сглаживания дискретных моделей на основе использования минимизации функционала и теории R-функций для управления этим процессом (формой) сглаживания.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что разработано программное обеспечение, реализующее предложенный метод, на основе которого решены задачи исследования напряженно-деформированного состояния пластин под действием нагрузки, приложенной в некоторой области.

Перспективы дальнейших исследований состоят в том, чтобы более точно определить оптимальные значения параметров метода, а также определения областей применений функционалов на основе других метрик или их комбинаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. *Field D.A. Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulation / D.A. Field // Communications in Applied Numerical Methods. – 1988. – vol. 4. – P. 709-712.*
2. *Zhou T. An Angle-based Approach to Two-Dimensional Mesh Smoothing / Tian Zhou and Kenji Shimada // 9th International Meshing Roundtable: International Conference, New Orleans, U.S.A., October 2-5, 2000 : proceedings. – 2000. – Sandia: Sandia National Laboratories, P. 373-384.*
3. *Chen L. Mesh Smoothing Schemes Based on Optimal Delaunay Triangulations // 13th International Meshing Roundtable: International Conference, Williamburg, U.S.A., September 19-22, 2004 : proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2004. – P. 109-120.*
4. *Blacker T.D. Paving: a New Approach to Automated Quadrilateral Mesh Generation / T.D. Blacker // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1991. – vol. 32. – P. 811-847.*
5. *Zhu J.Z. A New Approach to the Development of Automatic Quadrilateral Mesh Generation / J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz, E. Hinton, J. Wu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – vol. 32. – 1991. – P. 849-866.*
6. *Hansbo P. Generalized Laplacian Smoothing of Unstructured Grids / P. Hansbo // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 1995. – vol. 11. – P. 455-464.*
7. *Amenta N. Optimal Point Placement for Mesh Smoothing / Nina Amentaa, Marshall Bernb, David Eppstein // Journal of Algorithms. – 1999. – vol. 30, iss. 2. – P. 302-322.*
8. *Freitag L.A. Local Optimization-based Untangling Algorithms For Quadrilateral Meshes / Lori A. Freitag, Paul E. Plassmann // 10th International Meshing Roundtable: International Conference, Newport Beach, U.S.A., October 7-10, 2001: proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2001. – P. 397-406.*
9. *Castillo J. E. An adaptive direct variational grid generation method / José E. Castillo // Computers & Mathematics with Applications. – 1991. – vol. 21, iss. 5. – P. 57-64.*
10. *Tinoco-Ruiz J.-G. Some Properties of Area Functionals in Numerical Grid Generation / José-Gerardo Tinoco-Ruiz, Pablo Barrera-Sánchez, Adán Cortes-Médina // 10th International Meshing Roundtable: International Conference, Newport Beach, U.S.A., October 7-10, 2001: proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2001. – P. 43-54.*
11. *Barrera-Sánchez P. Robust Discrete Grid Generation on Plane Irregular regions / Pablo Barrera-Sánchez, Guilmer F. González Flores, Francisco J. Dominguez-Mota // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2003. – vol. 43, iss. 6. – P. 845-853.*

12. Khattri S.K. An effective quadrilateral mesh adaptation / Sanjay Kumar Khattri // Journal of Zhejiang University SCIENCE A. – 2006. – vol. 7, iss. 12. – P. 2018-2021.

13. Khattri S.K. An adaptive quadrilateral mesh in curved domains / Sanjay Kumar Khattri // Serdica Journal of Computing. – 2009. – Volume 3. – P. 248-268.

14. Canann S.A. An Approach to Combined Laplacian and Optimization-Based Smoothing for Triangular, Quadrilateral, and Quad-Dominant Meshes / S.A. Canann, JR. Tristano, ML. Staten // 7th International Meshing Roundtable: International Conference, Dearborn, Michigan, U.S.A., October 26-28, 1998 : proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 1998. – P. 479-494.

15. Freitag L.A. On Combining Laplacian and Optimization-based Mesh Smoothing Techniques / Lori A. Freitag // AMD Trends in Unstructured Mesh Generation. – 1997. – vol. 220. – P. 37-43.

16. Chen Z. Combined Laplacian and Optimization-based Smoothing for Quadratic Mixed Surface Meshes // 12th International Meshing Roundtable: International Conference, Santa Fe, U.S.A., September 14-17, 2003 : proceedings. – Sandia: Sandia National Laboratories, 2003. – P. 201-213.

17. Рвачев В.Л. Введение в теорию R-функций / В.Л. Рвачев, Т.И. Шейко // Проблемы машиностроения. – 2001. – Т. 4, № 1–2. – С. 46-58.

18. Максименко-Шейко К.В. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К.В. Максименко-Шейко, А.М. Мацевитый, А.В. Толок, Т.И. Шейко // Информационные технологии. – 2007. – № 10. – С. 23-32.

УДК 623.681.93

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕЖИМОМ СОПРОВОЖДЕНИЯ МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РЛС

К.т.н. О.Л. Смирнов[1], к.т.н. О.Н. Ставицкий[1], к.т.н. А.А. Наконечный[2], С.С. Горелышев[3]

1. Харьковский университет Воздушных Сил имени Ивана Кожедуба

2. Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

3. Московский физико-технический институт, г.Москва, Российская Федерация

Рассмотрен принцип управления режимом сопровождения многофункциональной РЛС (радиолокационной станции), основанный на учёте изменения уровней шумов в канале измерений РЛС и модели динамики сопровождаемой цели, адаптивной к её перемещению в пространстве. Сформулированы особенности практической реализации полученных результатов, представляющих собой новый тип управления режимом сопровождения, в РЛС кругового и секторного обзора.

Розглянуто принцип управління режимом супроводу багатофункціональної РЛС (радіолокаційної станції), заснований на обліку зміни рівнів шумів в каналі вимірювань РЛС і моделі динаміки супроводжуваної цілі, адаптивної до її переміщення в просторі. Сформульовано особливості практичної реалізації отриманих результатів, що представляють собою новий тип управління режимом супроводу, в РЛС кругового і секторного огляду.

The article presents developed principles for determining of optimal values of the cycle time measurement tracking coordinates of target and data refresh rate, which changing adaptively to the noise level in channel measurement by radar and dynamic characteristics of the maintaining target. The features of the practical implementation of the results, which are a new type of mode control tracking in radar circular and sector review.

Ключевые слова: *многофункциональная РЛС, режим сопровождения, адаптивное управление.*

Постановка проблемы

Многофункциональная радиолокационная станция (МФ РЛС) в режиме сопровождения должна обеспечить точное определение координат и параметров движения целей, находящихся в зоне обзора. Процесс обслуживания каждой сопровождаемой цели состоит из тактов измерения её координат длительностью τ, которые повторяются с периодом Т [2]:

$$E = \tau / T \,, \qquad (1)$$

где E - относительный ресурс времени, выделяемый на обслуживание конкретной цели в течение анализируемого временного интервала.

Критерием качества управления рассматриваемым режимом является точность сопровождения цели, количественно выражаемая величиной ошибки оценки соответствующих координат (ошибки сопровождения), которая в общем случае представляет собой сумму флуктуационной (обусловленной наличием шумов в канале измерений РЛС) и динамической (вызываемой шумами в модели динамики цели) ошибок сопровождения [1-4].

Дисперсия флуктуационной ошибки сопровождения цели $\sigma_{ф}^2$, например, по угловым координатам, равна [1]:

$$\sigma_{ф}^2 = \frac{\theta_{л}^2}{\left(E_c / H\right)} \cdot \frac{T_{изм}}{\tau} \,, \qquad (2)$$

где - $\theta_{л}$ ширина главного лепестка диаграммы направленности антенны РЛС, град;

E_c – энергия принятого сигнала, Дж;

H – спектральная плотность шума измерений, Вт/Гц;

$T_{изм}$ - период проведения единичных измерений координат цели, с.

В соответствие с основным уравнением радиолокации величина H, т.е. уровень шума в канале измерений РЛС, изменяется по мере движения цели в зоне обзора [4, 5]:

